Marius Burtea Georgeta Burtea
Valentin Nicula, Vasile Dilimoț Niță, Silvia Mușătoiu, Angela Anton, Paul Băiatu, Ramona Beșleagă, Mihaela Beca, Carmen Căpitanu, Simona Chintoan, Monica Coadă, Alisa Hârjabă, Arhire Felix, Elvira Mitache, Constantin Nicolau, Romelia Scheau, Daniela Țîrcovnicu, Magdalena Vasile, Mariana Ursu

CLASA a X-a
CULEGERE DE
MATEMATICĂ
Filiera teoretică
specializarea matematică-informatică

semestrul I

- **mulțimi de numere**
- **funcții**
- **ecuații**

CAMPION

CUPRINS

I MULŢIMI DE NUMERE

1 MULŢIMEA NUMERELOR REALE. PUTERI SI RADICALI.

1.1. RADICALUL DE ORDIN n AL UNUI NUMĂR REAL, $n \geq 2$. PROPRIETĂŢI.

Breviar teoretic

1. *Radicalul de ordinul n dintr-un număr real pozitiv.*

Dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se numeşte **radicalul de ordinul** n din a, numărul real pozitiv a cărui putere a n – a este egală cu a.

Se notează $\sqrt[n]{a}$.

Reţinem: pentru $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 0$ şi $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

- pentru $a = 0 \Rightarrow \sqrt[n]{0} = 0$.
- pentru $n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{a} \overset{not.}{=} \sqrt{a}$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. *Radicalul de ordin impar al unui număr negativ.*

Dacă $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ este număr impar, se numeşte radical de ordin n din a, numărul real negativ a cărui putere a n – a este egală cu a.

Se notează: $\sqrt[n]{a}$.

Reţinem: pentru $a < 0$, $n =$ impar, $n \geq 3 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < 0$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

3. *Proprietăţi ale radicalilor de ordin n.*

a) *Radicalul produsului:*

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $\forall a,b \in [0,+\infty)$.
- Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, $n =$ impar, proprietatea este adevărată pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$.

b) *Radicalul unui raport*

- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \in [0,+\infty)$, $b \in (0,+\infty)$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
- Dacă n este impar, $n \geq 3$, proprietatea este adevărată pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi $b \in \mathbb{R}^*$.

c) *Puterea unui radical*

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, $a \in [0,+\infty)$, $m \in \mathbb{N}^*$.
- Dacă n este impar, $n \geq 3$ proprietatea rămâne adevărată şi pentru $a < 0$.

d) *Scoaterea unui factor de sub radical*

$\sqrt[n]{a^{mn} \cdot b} = a^m \cdot \sqrt[n]{b}$, $\forall a \in [0,+\infty)$.

e) *Amplificarea, simplificarea unui radical*

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$, $\forall a \in [0,+\infty)$, $k \in \mathbb{N}^*$ (amplificarea).

$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $\forall a \in [0,+\infty)$, $k \in \mathbb{N}^*$ (simplificarea).

f) *Compunerea radicalilor* $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $\forall a \in [0,+\infty)$.

g) *Compararea radicalilor* Dacă $a,b \in [0,+\infty)$, atunci $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$.

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt{3^6}$; $\sqrt[5]{4^{15}}$; $\sqrt[3]{-64}$; $\sqrt[4]{4096}$. b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; $\sqrt[9]{\frac{-1}{512}}$; $\sqrt[4]{\frac{256}{81}}$.

Soluție a) Avem: $\sqrt{3^6}=\sqrt{\left(3^3\right)^2}=3^3=27$; $\sqrt[5]{4^{15}}=\sqrt[5]{\left(4^3\right)^5}=4^3=64$; $\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-\sqrt[3]{4^3}=-4$;

$\sqrt[4]{4096}=\sqrt[4]{2^{12}}=\sqrt[4]{\left(2^3\right)^4}=2^3=8$. b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=-\frac{1}{3}$; $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^6}=\frac{1}{2}$;

$\sqrt[9]{-\frac{1}{512}}=\sqrt[9]{\left(-\frac{1}{2}\right)^9}=-\frac{1}{2}$; $\sqrt[4]{\frac{256}{81}}=\sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^4}=\frac{4}{3}$.

2. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă sens radicalii:

a) $\sqrt{3x-6}$; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{3-|x|}}$; c) $\sqrt[4]{\frac{x-1}{16-x^2}}$.

Soluție a)Condiția de existență a radicalului de ordin par impune $3x-6\geq 0\Rightarrow 3x\geq 6\Rightarrow x\geq 2\Rightarrow x\in[2,+\infty)$

b) Se pune condiția ca numitorul să fie nenul: $3-|x|\neq 0\Rightarrow |x|\neq 3\Rightarrow x\neq 3$ sau $x\neq -3$. Așadar,

$x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. c) Fiind un radical de ordin par trebuie ca $\frac{x-1}{16-x^2}\geq 0$.

Tabloul de semn pentru expresia din primul membru al inecuației este:

x	$-\infty$ -4 1 4 $+\infty$
$x-1$	− − − − − − 0 + + + + + +
$16-x^2$	− − − − 0 + + + 0 − − − −
$\frac{x-1}{16-x^2}$	+ + + + | − − 0 + + | − − − −

Soluția este mulțimea $(-\infty,-4)\cup[1,4)$.

3. Se consideră numerele reale $a=\left|-3^2\right|+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$, $b=\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$. Să se arate că:

a) $a\in\mathbb{N}$; b) $b\notin\mathbb{N}$.

Soluție a) Numărul a se scrie sub forme echivalente astfel: $a=9+\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-2\right|=$

$=9+\left(-1+\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}+2\right)=10\in\mathbb{N}$. b) Se observă că $9\mp 4\sqrt{5}=\left(2\mp\sqrt{5}\right)^2$. Rezultă că

$b=\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|2+\sqrt{5}\right|=-2+\sqrt{5}+2+\sqrt{5}=2\sqrt{5}\notin\mathbb{N}$..

4. Să se calculeze: a) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 3^{-5}}$; b) $\sqrt[4]{\frac{14}{5}\cdot\frac{343}{250}}$; c) $\sqrt[3]{225\sqrt{225}}$.

Soluție a) Avem: $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 3^{-5}}=\sqrt[5]{2^{10}}\cdot\sqrt[5]{3^{-5}}=2^2\cdot 3^{-1}=\frac{4}{3}$. b) $\sqrt[4]{\frac{14}{5}\cdot\frac{343}{250}}=\sqrt[4]{\frac{7}{5}\cdot\frac{7^3}{5^3}}=\sqrt[4]{\left(\frac{7}{5}\right)^4}=\frac{7}{5}$.

c) $\sqrt[3]{225\sqrt{225}}=\sqrt[3]{225\cdot 15}=\sqrt[3]{15^2\cdot 15}=\sqrt[3]{15^3}=15$.

5. a) Să se scoată factori de sub radicali: $\sqrt[4]{3^6\cdot 4^5}$, $\sqrt[5]{a^{12}b^7}$.

b) Să se introducă factorii sub radical: $2\sqrt[3]{5}$, $x\sqrt{xy}$, $y\sqrt[4]{y^2x}$.

Soluție a) $\sqrt[4]{3^6\cdot 4^5}=3\cdot 4\cdot\sqrt[4]{3^2\cdot 4}=12\sqrt[4]{36}$. $\sqrt[6]{a^{12}b^7}=a^2b\sqrt[6]{b},\ \forall\, a\in\mathbb{R},\ b\in[0,+\infty)$.

b) $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}$; $x\sqrt{xy}=\begin{cases}\sqrt{x^3y}, & x\ge 0,\ y\ge 0\\ -\sqrt{x^3y}, & x<0,\ y\ge 0\end{cases}$; $y\sqrt[4]{y^2x}=\begin{cases}\sqrt[4]{y^6x}, & y\ge 0\\ -\sqrt[4]{(-y^4)y^2x}, & y<0\end{cases}$.

6. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2010]{(3-m)x^2-2x+3m-5}$.

Soluție f este definită pentru $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(3-m)x^2-2x+3m-5\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3-m>0$ și $\Delta\le 0\Leftrightarrow m\in(-\infty,3)$ și $\Delta\le 0$. Avem $\Delta=b^2-4ac=4-4(3-m)(3m-5)\le 0$. Se obține inecuația $4(3m^2-14m+16)\le 0$ cu mulțimea soluțiilor $\left[2,\frac{8}{3}\right]$. Soluția finală este: $(-\infty,3)\cap\left[2,\frac{8}{3}\right]=\left[2,\frac{8}{3}\right]$.

Exerciții și probleme propuse

Exersare

1. Să se calculeze : a) $\sqrt{3^8}$; $\sqrt[4]{2^{16}}$; $\sqrt[5]{-2^{15}}$; $\sqrt[7]{4^{21}}$; b) $\sqrt{529}$; $\sqrt[3]{343}$; $\sqrt[4]{625}$; $\sqrt[6]{729}$;

c) $\sqrt[3]{-\frac{1}{5^6}}$; $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$; $\sqrt[9]{-\frac{1}{512}}$; $\sqrt[6]{\frac{1458}{128}}$.

2. Să se încadreze între doi întregi consecutivi numerele :
a) $\sqrt{751}$; b) $\sqrt{4224}$;c) $-\sqrt[3]{961}$;d) $\sqrt[4]{1250}$;e) $\sqrt[5]{-800}$.

3. Să se compare numerele : a) $\left[\sqrt{248}\right]$ și $\left[\sqrt[3]{2745}\right]$; b) $\left[-\sqrt[3]{129}\right]$ și $\left[-\sqrt[4]{630}\right]$;

c) $\left\{\sqrt{72,25}\right\}$ și $\left\{\sqrt[3]{32,768}\right\}$; d) $\left\{-\sqrt[3]{3,375}\right\}$ și $\left\{-\sqrt[4]{0,0016}\right\}$.

4. Să se aproximeze prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ numerele :
a) $a=\sqrt{6}$;b) $b=\sqrt[3]{3}$;c) $c=\sqrt[4]{5}$.

5. Să se aproximeze cu două zecimale exacte numerele :
a) $a=\sqrt{7}$; b) $b=\sqrt{15}$; c) $c=\sqrt{175}$; d) $d=\sqrt{825}$.

6. Folosind proprietățile radicalilor să se calculeze : a) $\sqrt{789\cdot 4^3}$; b) $\sqrt[4]{6^5\cdot 2^3\cdot 3^3}$; c) $\sqrt[5]{81^6\cdot 2^4\cdot 54}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{7}{25}\cdot\frac{49}{3125}}$; e) $\left(\sqrt[4]{\left(\frac{4}{25}\right)^3}\right)^2$; f) $\sqrt{\sqrt{81x^{12}y^8}}$; g) $\sqrt{\sqrt[3]{64\left(x^3\right)^2}}$.

7. Folosind proprietatea de amplificare a radicalilor să se aducă următorii radicali la același ordin :
a) $\sqrt{5}$ și $\sqrt[3]{2}$; b) $\sqrt{x},\sqrt[3]{y},\sqrt[4]{z}$; c) $\sqrt[5]{a^2b^2}$ și $\sqrt[3]{m^2n}$.

8. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât să fie definite expresiile :a) $\sqrt{4x-24}$; b) $\sqrt[4]{3x^2+x-2}$;
c) $\sqrt[6]{9x-x^2}$;d) $\sqrt[5]{7x-3}$; e) $\sqrt{x+3}-2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[4]{25-x^2}$.

9. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele expresii să aibă sens :
a) $\sqrt[3]{\left(x^2-8x\right)^{-1}}$; b) $\sqrt[4]{\frac{3-x}{2x+1}}$; c) $\sqrt[6]{\frac{-x}{x^2-49}}$;

d) $\sqrt{\frac{12-x-x^2}{|x+2|}}$; e) $\sqrt[5]{\frac{1}{|2x|-4}}+\sqrt{\frac{|x|}{9-x^2}}$; f) $\sqrt[7]{\frac{2}{\left|x^2-1\right|-3}}$.

Aprofundare

10. Să se scrie fără radicali expresiile următoare precizând domeniul lor de existență :

a) $f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^{10}}$; b) $f(x)=\sqrt[4]{(x-1)^8}+\sqrt[3]{-27x^6}$; c) $f(x)=\sqrt[4]{16x^{12}}+\sqrt[3]{x^6}$;

d) $f(x)=\sqrt{x^4}\cdot\sqrt[3]{3x(x+1)+x^3+1}$; e) $f(x)=\sqrt{(x+1)^6}$.

11. Să se reprezinte grafic funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$, precizând de fiecare dată domeniul de definiţie D, dacă :

a) $f(x)=\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{4x^2+4x+1}$; b) $f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^6}-\sqrt[4]{x^8}$;

c) $f(x)=\sqrt[4]{\left(x^2-3x-4\right)^4}$; d) $f(x)=(x+2)\sqrt[3]{\left(8x^3+12x^2+6x+1\right)}$.

Dezvoltare

12. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe funcţiile :

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[4]{(3m+1)x^2+2x+1-m}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-2mx+2m^2-m}$.

13. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe funcţiile :

a) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[2010]{(2m-1)x^2+2x+m}$; b) $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[2012]{x^2+(m+2)x+m+5}$.

14. Pentru ce valori ale parametrului real m există funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2}{(m+2)x^2-2mx+m+1}}$.

15. Să se determine mulţimile de numere reale : a) $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\sqrt{\dfrac{7x+5}{x-3}}\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\sqrt[3]{\dfrac{6x-3}{x-4}}\in\mathbb{Z}\right\}$.

1.2. OPERAŢII CU RADICALI

Breviar teoretic

1. *Înmulţirea radicalilor*
- $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\ a,b\in\mathbb{R}.$
- $\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{a_1a_2...a_k},\ a_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}.$

2. *Împărţirea radicalilor* $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}},\ a,b\in[0,+\infty),\ b\ne 0.$

3. *Ridicarea la putere* $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},\ a\in(0,+\infty),\ m\in\mathbb{Z}.$

4. *Scoatearea unui factor de sub radical* $\sqrt[n]{a^{nk}\cdot b}=a^k\sqrt[n]{b},\ a,b\in[0,+\infty).$

5. *Înmulţirea unui radical cu un număr(introducerea factorilor sub radical)* $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b},\ a,b\in[0,+\infty).$

6. *Radicalul de ordin m dintr-un radical* $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a},\ a\in[0,+\infty)$

- Dacă m şi n sunt numere impare, atunci condiţia de pozitivitate a lui a şi b nu mai este necesară.
- În cazul operaţiilor 1. şi 2. radicalii sunt de ordin diferit, se aduc aceşti radicali la acelaşi ordin prin operaţia de amplificare.

7. *Raţionalizarea numitorilor*

- A raţionaliza numitorul unei fracţii înseamnă a elimina radicalii de la numitor.
- Două expresii se numesc conjugate dacă produsul lor este o expresie fără radicali.
- Pentru a raţionaliza numitorul unui fracţii se amplifică fracţia cu conjugata expresiei de la numitor.

a) *Numitorul este un radical.*

Dacă numitorul este $\sqrt[n]{a^k},\ a>0,\ k<n,$ atunci fracţia se amplifică cu $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ şi numitorul devine $\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a^{n-k}}=a.$

b) *Numitorul este de forma* $\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right),\ a,b>0.$

Expresiile $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$, $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ sunt conjugate şi $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$.

c) *Numitorul este de forma* $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}$, $a,b,c>0$.

Se amplifică fracţia succesiv cu expresii conjugate ca în cazul b).

d) *Numitorul este de forma* $\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)$ *sau* $\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)$.

Se folosesc perechile de expresii conjugate:

- $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=(a+b)$.
- $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=(a-b)$.

e) Numitorul este de forma $\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$.

Se folosesc perechile de expresii conjugate:

- $\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}\cdot b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}=a-b\right)$.
- Dacă $n=$ impar, avem:

$\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a+b$.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Să se efectueze: a) $5\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{375}$. b) $\left(\sqrt[4]{11}+2\right)\left(2-\sqrt[4]{11}\right)\left(\sqrt{11}+4\right)$. c) $\sqrt[2]{2\sqrt[5]{2}}\cdot\sqrt[10]{4\sqrt[4]{2^5\cdot 8}}$.

Soluţie a) Aplicăm scoaterea fatorilor de sub radical şi însumăm algebric termenii asemenea.
Obţinem: $5\cdot 3\sqrt[3]{3}-2\cdot 2\sqrt[3]{3}-2\cdot 5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}\,(15-4-10)=\sqrt[3]{3}$.

b) Efectuăm înmulţirile folosind şi formule de calcul prescurtat. Avem:

$\left(\sqrt[4]{11}+2\right)\left(2-\sqrt[4]{11}\right)\left(\sqrt{11}+4\right)=\left[2^2-\left(\sqrt[4]{11}\right)^2\right]\left(\sqrt{11}+4\right)=\left(4-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{11}+4\right)=16-11=5.$

c) Folosim introducerea factorilor sub radical, simplificarea radicalilor, radicalul unui radical şi înmulţirea radicalilor. Obţinem: $\sqrt[2]{\sqrt[5]{2^5\cdot 2}}\cdot\sqrt[10]{\sqrt[4]{4^4\cdot 2^5\cdot 8}}=\sqrt[10]{2^6}\cdot\sqrt[40]{2^{16}}=\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}=\sqrt[5]{2^5}=2$.

2. Să se introducă factorii sub radical: a) $xy\sqrt[4]{5x^2y}$; b) $xy\sqrt[5]{xy^2}$.

Soluţie a) Radicalul de ordin 4 există pentru $x\in\mathbb{R}$ şi $y\geq 0$. Rezultă că
$xy\sqrt[4]{5x^2y}=\sqrt[4]{5x^4\cdot y^4\cdot x^2\cdot y}=\sqrt[4]{5x^6y^5}$ pentru $x\geq 0$, $y\geq 0$ şi $xy\sqrt[4]{5x^2y}=-\sqrt[4]{5\cdot(-x)^4\cdot y^4\cdot x^2y}=-\sqrt[4]{5x^6y^5}$ pentru $x\leq 0$, $y\geq 0$.

b) Radicalul de ordin 5 are sens pentru $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Rezultă că $xy\sqrt[5]{xy^2}=\sqrt[5]{x^5y^5\cdot xy^2}=\sqrt[5]{x^6y^7}$.

3. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{125}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}$.

Soluţie a) Amplificăm fracţia cu $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ şi se obţine $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{11-5}=\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{6}$. b) Amplificăm fracţia cu $\sqrt[5]{5^2}$ şi obţinem $\dfrac{1}{\sqrt[5]{125}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{5^3}}=\dfrac{\sqrt[5]{5^2}}{5}=\dfrac{\sqrt[5]{25}}{5}$. c) Amplificăm fracţia cu expresia conjugată numitorului şi se obţine: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{3-2}=\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{1}$. d) Expresia conjugată numitorului este $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$. Se obţine fracţia $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}{4-3}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$.

4. Să se raţionalizeze numitorii următoarelor fracţii: a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt[3]{4}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}+\sqrt[5]{5}}$.

Soluţie a) Avem succesiv: $\dfrac{2}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2}}=\dfrac{2\left[\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2}\right]}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2-2}=\dfrac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{10-2\sqrt{35}}=$

$=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-\sqrt{35}}=\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{35}\right)}{5^2-35}=\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{35}\right)}{-10}$. b) Amplificăm cu $\sqrt{5}+\sqrt[3]{4}$ şi obţinem: $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt[3]{4}}{5-\sqrt[3]{4^2}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{4}\right)\left(5^2+5\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4^4}\right)}{5^3-4^2}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{4}\right)\left(25+10\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}\right)}{109}$.

5. Să se compare numerele, aşezând în ordine crescătoare: a) $\sqrt{8},\ \sqrt[4]{2^3},\ \sqrt{8\sqrt{8}}$; b) $\sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{8},\ \sqrt[6]{26}$.

Soluţie a) Scriem numerele sub forme echivalente. Avem: $\sqrt{8}=\sqrt[4]{8^2}$; $\sqrt{8\sqrt{8}}=\sqrt{\sqrt{8^3}}=\sqrt[4]{8^3}$. Se observă că $8<8^2<8^3$ şi ca urmare avem ordinea $\sqrt[4]{8}<\sqrt[4]{8^2}<\sqrt[4]{8^3}$. Aşadar, aşezarea în ordine crescătoare este: $\sqrt[4]{2^3},\ \sqrt{8},\ \sqrt{8\sqrt{8}}$. b) Aducem radicalii la indicele comun-cel mai mic multiplu comun al numerelor 3,4,5, anume 12. Avem următorii radicali: $\sqrt[12]{5^4},\ \sqrt[12]{8^3},\ \sqrt[12]{26^2}$. Comparând numerele de sub radicali avem $8^3<5^4<26^2$. Rezultă că $\sqrt[12]{8^3}<\sqrt[12]{5^4}<\sqrt[12]{26^2}$, deci $\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[6]{26}$.

Exerciţii şi probleme propuse

Exersare

1. Calculaţi: a) $\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{300}$; b) $\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$; c) $\sqrt{27}-\sqrt{80}+\sqrt{45}+\sqrt{243}$.

2. Calculaţi: a) $\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{54}$; b) $\sqrt[4]{80}-\sqrt[4]{405}$; c) $\sqrt[5]{64}+\sqrt[5]{2048}$.

3. Calculaţi: a) $\sqrt{\dfrac{49}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{64}}-\sqrt{\dfrac{4}{5}}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}-\sqrt{\dfrac{8}{125}}$; c) $7\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}+2\sqrt[3]{\dfrac{8}{9}}-5\sqrt[3]{\dfrac{125}{9}}$.

4. Calculaţi: a) $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-4\sqrt{5}\right)$; b) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2$; c) $\left(1+\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)^2$.

5. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor : a) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-3}$; c) $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$.

6. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor : a) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}+1}$; b) $\dfrac{3}{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

7. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor : a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$; b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}+1}$; c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$.

8. Calculaţi :a) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-1}$.

9. Calculaţi : a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; c) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

10. Calculaţi :a) $\sqrt{17+4\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$; b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}},\ \forall a\in[1,2]$.

Aprofundare

11. Calculati : a) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3}+5}{3\sqrt{3}-5}}$; c) $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$.

12. Demonstraţi că $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

13. Demonstraţi că există o infinitate de numere $x,y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, astfel încât $x+y\in\mathbb{Q}$ şi $x\cdot y\in\mathbb{Q}$.

14. Demonstraţi că $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

15. Arătaţi că $\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{12+\sqrt{13}}}}}<2$.

16. Comparaţi numerele: $\sqrt{\sqrt{21}-\sqrt{13}}$ şi $\sqrt{\sqrt{23}-\sqrt{15}}$.

17. Arătaţi că $\left(\sqrt[3]{\frac{625}{8}}-\sqrt[3]{\frac{40}{27}}-\sqrt[3]{\frac{135}{64}}\right)\cdot\frac{36\sqrt[3]{25}}{13}\in\mathbb{N}$.

18. Arătaţi că $\sqrt[3]{\sqrt{9+\frac{125}{27}}+3}-\sqrt[3]{\sqrt{9+\frac{125}{27}}-3}\in\mathbb{Q}$.

19. Verificaţi dacă $\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\in\mathbb{N}$.

20. Demonstraţi inegalităţile : a) $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k\cdot(k+1)}<\frac{n^2+n+1}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$; b) $\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}}>9{,}9$;

c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k\cdot(n+1-k)}}>\frac{2n}{n+1}\forall n\in\mathbb{N}\quad n\geq 2$.

21. Arătaţi că nu există numere raţionale a,b astfel încât $\sqrt{10}=a\sqrt{2}+b\sqrt{5}$.

22. a) Fie $a=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ şi prima cifră zecimală a lui a este 4

b) Fie $b=\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n^2+3}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

c) Calculaţi $\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k(k+1)}\right]\cdot\left[\sqrt{(k+1)(k+2)}\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, unde [ ] reprezintă partea întreagă.

23. Fie $a=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)...\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)$ şi

$b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)...\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $a<b$.

24. Dacă $x\in[1,5]$, arătaţi că $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=4$.

25. Dacă $x>0$ şi $\sqrt{x+5\sqrt{x+5\sqrt{6x}}}=x$, arătaţi că $x=6$.

26. Dacă $a,b,c\in\mathbb{Q}^*$ şi $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{b}\cdot\sqrt[7]{c}\in\mathbb{Q}$, arătaţi că $\sqrt[3]{a},\sqrt[5]{b},\sqrt[7]{c}\in\mathbb{Q}$.

27. Dacă $a,b\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\in\mathbb{Q}$, să se arate că $\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{b}\in\mathbb{Q}$.

28. Dacă $a,b\in\mathbb{R}_+$, arătaţi că $a^2+4b\geq 5a\sqrt[4]{a^2b}-11a\sqrt{b}+11\sqrt[4]{a^2b^3}$.

29. Demonstraţi că $\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\left(2+\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}\left(2+\sqrt{2}\right)<21$.

Dezvoltare

30. Calculaţi sumele:a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$; b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}$; c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{(k+1)^2}}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$.

31. Dacă $p,q,r,s\in\mathbb{Q}$ şi $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}+r\sqrt{10}+s=0$, arătaţi că $p=q=r=s=0$.

32. Dacă $a,b,c\in\mathbb{Q}$ şi $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$, arătaţi că $a=b=c=0$.

33. Aflaţi partea întreagă a numărului $\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+...\sqrt[3]{24}}}$.

34. Dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, iar $0<a<b<c<d$, astfel încât $a+d=b+c$, atunci $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{d}<\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}$.